

Kurt Gödel's Gottesbeweis auf dem Computer

Christoph Benz Müller

Fachbereich Mathematik und Informatik, FU Berlin

Lange Nacht der Wissenschaften
Berlin, 10. Mai 2014

(gemeinsame Arbeit mit Bruno Woltzenlogel-Paleo, TU Wien)

Internationale Presse (seit August 2013)



Germany

- Telepolis & Heise
- Spiegel Online
- FAZ
- Die Welt
- Berliner Morgenpost
- ...

Austria

- Die Presse
- Wiener Zeitung
- ORF
- ...

Italy

- Repubblica
- L'Espresso
- ...

India

- Delhi Daily News
- India Today
- ...

US

- ABC News
- ...

International

- Spiegel International
- United Press Intl.
- ...

Internationale Presse (seit August 2013)



Germany

- Telepolis & Heise
- Spiegel Online
- FAZ
- Die Welt
- Berliner Morgenpost
- ...

Austria

- Die Presse
- Wiener Zeitung
- ORF
- ...

Italy

- Repubblica
- L'Espresso
- ...

India

- Delhi Daily News
- India Today
- ...

US

- ABC News
- ...

International

- Spiegel International
- United Press Intl.
- ...

SCIENCE NEWS

HOME / SCIENCE NEWS / RESEARCHERS SAY THEY USED MACBOOK TO PROVE GOEDEL'S GOD THEOREM

Researchers say they used MacBook to prove Goedel's God theorem

Oct. 23, 2013 | 8:14 PM | [1 comments](#)

SCIENCE NEWS

HOME / SCIENCE NEWS / RESEARCHERS SAY THEY USED MACBOOK TO PROVE GOEDEL'S GOD THEOREM

Researchers say they used MacBook to prove Goedel's God theorem

Oct. 23, 2013 | 8:14 PM | [1 comments](#)

Stehen wir in Kontakt mit Steve Jobs?

Nein

Brauch man wirklich ein MacBook?

Nein

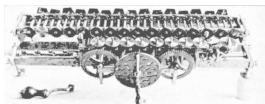
Hat Apple uns Geld geschickt?

Nein

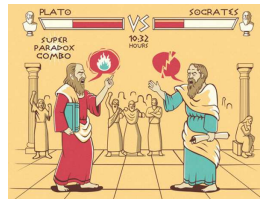
Leibniz' Vision — Calcalemus!



Leibniz (1646-1716)



Rechenmaschine



Streitende Philosophen

Leibniz war (u.a.) auf der Suche nach einer lingua characteristica (Sprache in der das gesamte Wissen formal ausgedrückt werden konnte) und einem calculus ratiocinator (Kalkül zum allgemeinen Schließen).

Vision: Zwei streitende/argumentierende Philosophen sollten Streitfragen durch einfaches *Rechnen* (Calcalemus!) klären können. Dazu müssten sie sich lediglich auf eine Formalisierung des Problems in der lingua characteristica einigen und dann den calculus ratiocinator anwenden.

Ontologischer Gottesbeweis



Anselm von Canterbury (1033 – 1109)

Gott ist ...

das, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann.

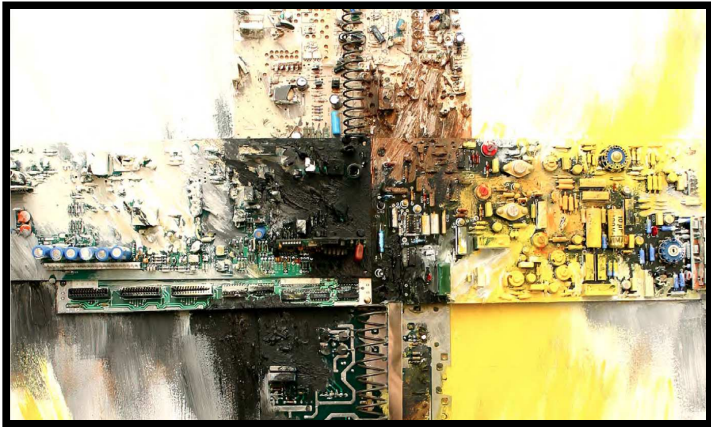
(id, quo nihil maius cogitari potest)

(Proslogion, 1077/78)

Es folgt: **Gott existiert!?**

Die Voraussetzungen fehlten noch bei Leibniz

- Universelle Logiksprache
- Geeigneter Formaler Kalkül
- Geeignete Rechenmaschinen (Computer)
- Implementierung (Theorembeweiser)



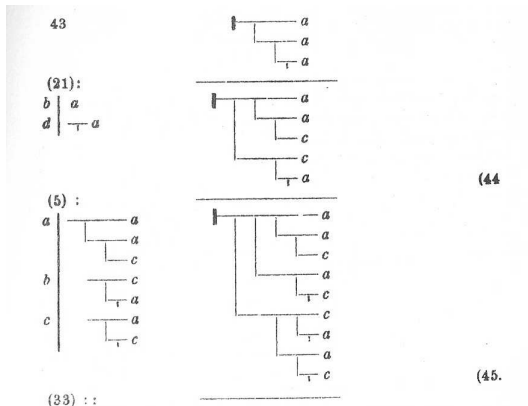
F(o,r,m,a,l,e) L(o,g,i,k)

Eine sehr kurze und unvollständige Einführung

Entwicklung der modernen Logik seit Ende des 19. Jahrhunderts



Gottlob Frege
(1848-1925)



- Begriffsschrift – Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens (1879)
 - Prädikatenlogik (höherer Stufe) als formale Sprache

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

*Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.*

Formale Logik

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
 $istKindVon(max, christoph)$
 $\forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive

(weitere Konnektive: $\neg, \vee, \equiv, \exists, =$)

Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

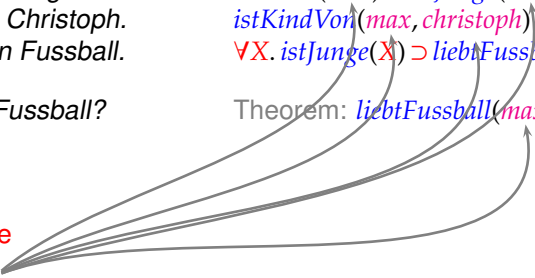
Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
 $istKindVon(max, christoph)$
 $\forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive
Individuensymbole



Beispiel-Formalisierung in Logik erster Stufe

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.
Er ist ein Kind von Christoph.
Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

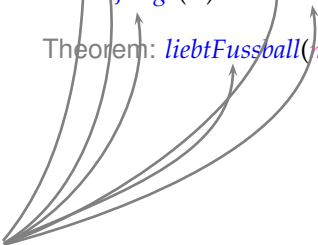
$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$
 $istKindVon(max, christoph)$
 $\forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Theorem: $liebtFussball(max)$

Logische Konnektive

Individuensymbole

Prädikaten- und Relationensymbole



Formaler Kalkül (System abstrakter Regeln)

$$\frac{\Delta \wedge \Box}{\Delta} \quad \frac{\Delta \wedge \Box}{\Box} \quad \frac{\Delta \quad \Box}{\Delta \wedge \Box}$$

$$\frac{\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})}{\text{istJunge}(\text{max})}$$

$$\frac{\forall X. \Box}{[t \rightarrow X] \Box} \quad \dots$$

$$\frac{\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)}{\text{istJunge}(\text{max}) \supset \text{liebtFussball}(\text{max})}$$

$$\frac{\Delta \quad \Delta \supset \Box}{\Box} \quad \dots$$

$$\frac{\text{istJunge}(\text{max}) \quad \text{istJunge}(\text{max}) \supset \text{liebtFussball}(\text{max})}{\text{liebtFussball}(\text{max})}$$

Kalkül des Natürlichen Schliessens — Gerhard Gentzen (1909-1945)

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Formaler Beweis

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Formaler Beweis

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istJunge}(\text{max})$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$

$istKindVon(max, christoph)$

$\forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Theorem: $liebtFussball(max)$

Formaler Beweis

$istKlein(max) \wedge istJunge(max)$

$istJunge(max)$

$\forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Formaler Beweis

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istJunge}(\text{max})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

$\text{istJunge}(\text{max}) \supset \text{liebtFussball}(\text{max})$

Formaler Beweis: Verkettung Instantiierter Kalkülregeln

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Formaler Beweis

$$\frac{\text{istJunge}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})}{\text{istJunge}(\text{max})} \quad \frac{\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)}{\text{istJunge}(\text{max}) \supset \text{liebtFussball}(\text{max})}$$

$$\text{liebtFussball}(\text{max})$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & \text{regnet} \wedge \text{kalt} \\ \wedge \quad & (\text{regnet} \wedge \text{kalt} \supset \text{glatteStrasse}) \\ \supset \quad & \text{glatteStrasse} \end{aligned}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & \text{istJunge}(\text{max}) \\ \wedge \quad & \forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X) \\ \supset \quad & \text{liebtFussball}(\text{max}) \end{aligned}$$

- Logik höherer Stufe

$$\text{istGott}(X) \equiv \forall \phi. \text{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{aligned} & \exists X. \text{istGott}(X) \\ \Box \exists X. \text{istGott}(X) \\ \Diamond \exists X. \text{istGott}(X) \end{aligned}$$

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$regnet \wedge kalt$
 $\wedge (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse)$
 $\supset glatteStrasse$

- Logik erster Stufe

$istjunge(max)$
 $\wedge \forall X. istjunge(X) \supset liebtFussball(X)$
 $\supset liebtFussball(max)$

- Logik höherer Stufe

$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$

- Modallogik

$\exists X. istGott(X)$
 $\Box \exists X. istGott(X)$
 $\Diamond \exists X. istGott(X)$

Elementare Aussagen (Wahr oder Falsch)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$regnet \wedge kalt$
 $\wedge (regnet \wedge kalt \supset glatteStrasse)$
 $\supset glatteStrasse$

- Logik erster Stufe

$istJunge(max)$
 $\wedge \forall X. istJunge(X) \supset liebtFussball(X)$
 $\supset liebtFussball(max)$

- Logik höherer Stufe

$istGott(X) \equiv \forall \phi. positiv(\phi) \supset \phi(X)$

- Modallogik

$\exists X. istGott(X)$
 $\Box \exists X. istGott(X)$
 $\Diamond \exists X. istGott(X)$

Prädikat

Individuum

Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & \text{regnet} \wedge \text{kalt} \\ \wedge & (\text{regnet} \wedge \text{kalt} \supset \text{glatteStrasse}) \\ \supset & \text{glatteStrasse} \end{aligned}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & \text{istJunge}(\text{max}) \\ \wedge & \forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X) \\ \supset & \text{liebtFussball}(\text{max}) \end{aligned}$$

- Logik höherer Stufe

$$\text{istGott}(X) \equiv \forall \phi. \text{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\begin{aligned} & \exists X. \text{istGott}(X) \\ & \Box \exists X. \text{istGott}(X) \\ & \Diamond \exists X. \text{istGott}(X) \end{aligned}$$

Prädikat

Individuum

Allaussage (Individuen)

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & \text{regnet} \wedge \text{kalt} \\ \wedge & (\text{regnet} \wedge \text{kalt} \supset \text{glatteStrasse}) \\ \supset & \text{glatteStrasse} \end{aligned}$$

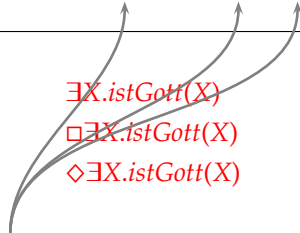
- Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & \text{istJunge}(\text{max}) \\ \wedge & \forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X) \\ \supset & \text{liebtFussball}(\text{max}) \end{aligned}$$

- Logik höherer Stufe

$$\text{istGott}(X) \equiv \forall \phi. \text{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik


$$\begin{aligned} & \exists X. \text{istGott}(X) \\ & \Box \exists X. \text{istGott}(X) \\ & \Diamond \exists X. \text{istGott}(X) \end{aligned}$$

Funktionen/Prädikate: in Allaussage, als Argument

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & \text{regnet} \wedge \text{kalt} \\ \wedge \quad & (\text{regnet} \wedge \text{kalt} \supset \text{glatteStrasse}) \\ \supset \quad & \text{glatteStrasse} \end{aligned}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & \text{istJunge}(\text{max}) \\ \wedge \quad & \forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X) \\ \supset \quad & \text{liebtFussball}(\text{max}) \end{aligned}$$

- Logik höherer Stufe

$$\text{istGott}(X) \equiv \forall \phi. \text{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X. \text{istGott}(X)$$

$$\Box \exists X. \text{istGott}(X)$$

$$\Diamond \exists X. \text{istGott}(X)$$

↖ Möglicherweise gilt ...

Verschiedene Logiken

- Aussagenlogik

$$\begin{aligned} & \text{regnet} \wedge \text{kalt} \\ \wedge \quad & (\text{regnet} \wedge \text{kalt} \supset \text{glatteStrasse}) \\ \supset \quad & \text{glatteStrasse} \end{aligned}$$

- Logik erster Stufe

$$\begin{aligned} & \text{istJunge}(\text{max}) \\ \wedge \quad & \forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X) \\ \supset \quad & \text{liebtFussball}(\text{max}) \end{aligned}$$

- Logik höherer Stufe

$$\text{istGott}(X) \equiv \forall \phi. \text{positiv}(\phi) \supset \phi(X)$$

- Modallogik

$$\exists X. \text{istGott}(X)$$

$$\Box \exists X. \text{istGott}(X)$$

$$\Diamond \exists X. \text{istGott}(X)$$

Notwendigerweise gilt ...

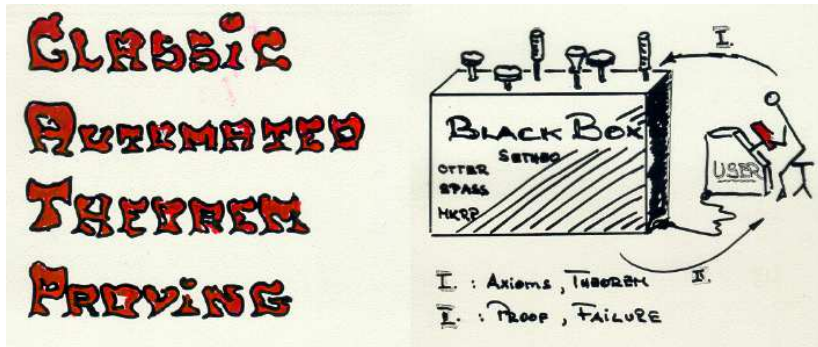


Bild: Jörg Siekmann

Demo: Theorembeweiser

Natürliche Sprache

Max ist ein kleiner Junge.

Er ist ein Kind von Christoph.

Alle Jungen mögen Fussball.

Frage: Liebt Max Fussball?

Formale Logik

$\text{istKlein}(\text{max}) \wedge \text{istJunge}(\text{max})$

$\text{istKindVon}(\text{max}, \text{christoph})$

$\forall X. \text{istJunge}(X) \supset \text{liebtFussball}(X)$

Theorem: $\text{liebtFussball}(\text{max})$

Eingabe an Theorembeweiser (<http://www.tptp.org>)

```
fof(a1,axiom, istKlein(max) & istJunge(max) ).
fof(a2,axiom,( istKindVon(max,christoph) )).
fof(a3,axiom,( ![X]:(istJunge(X) => liebtFussball(X)) ).

fof(c,conjecture,( liebtFussball(max) )).
```

“God is dead.”

- Nietzsche, 1883

“Nietzsche is dead.”

- God, 1900

Gödel's Gottesbeweis

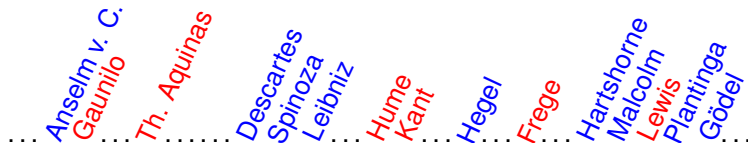
Ontologischer Gottesbeweis

Historische Entwicklung (pros und cons)

... Anselm v. C.
Gaunilo Th. Aquinas ...
Descartes
Spinoza Leibniz ...
Hume
Kant ...
Hegel Frege ...
Hartshorne
Malcolm Lewis
Plantinga Gödel ...

Ontologischer Gottesbeweis

Historische Entwicklung (pros und cons)



Anselm's Definition von Gott:

“Gott ist das, worüber hinaus nichts Größeres gedacht werden kann. ”

Gödel's Definition von Gott:

“Ein Gott-artiges Wesen besitzt alle positiven' Eigenschaften.”

$$G(x) \equiv \forall \phi. P(\phi) \supset \phi(x)$$

Zu zeigen durch logisches Schließen:

“(Notwendigerweise) existiert Gott.”

$$\Box \exists x. G(x)$$

Ontologischer Gottesbeweis: Unterschiedliche Interessen

- ▶ **Philosophie:** Grenzen der Metaphysik & Epistemologie
 - ▶ Wir definieren ein metaphysischen Begriff (Gott),
 - ▶ aber wir wollen eine Aussage treffen für die reale Welt.
- ▶ **Theologie:** Gutes Argument sollte Atheisten überzeugen.
- ▶ **Unsere:** Können Computer (Beweiser) verwendet werden
 - ▶ ... zur Formalisierung der Definitionen, Axiome, Theoreme?
 - ▶ ... zur schrittweisen Verifikation der Argumente?
 - ▶ ... zur Automatisierung von (Unter-)Argumenten?

in Richtung: “Computer-unterstützte Theoretische Philosophie”

(cf. Leibniz dictum — Calculamus!)

Kurt Gödel (1906-1978)



- ▶ geboren 28.4.1906 in Brünn (Tschechien)
 - ▶ kränklich, schwächlich, introvertiert
 - ▶ Studium ab 1924 in Wien, Wiener Kreis
 - ▶ 1933/34 erste Reisen nach Princeton, USA
 - ▶ 1938 heiratet Adele Porkert (Kabarettänzerin)
 - ▶ 1940 Flucht nach USA (über Russland/Japan)
 - ▶ Professor in Princeton
 - ▶ Enger Freund von Einstein
-
- ▶ 1929/30 Dissertation: Über die Vollständigkeit des Logikkalküls
 - ▶ 1930: Vortrag in Königsberg: Unvollständigkeitssätze
“Die Logik wird nie mehr dieselbe sein.” (John von Neumann)
 - ▶ Viele interessante Arbeiten — aber: *“I do not fit in this century!”*

Gödel's Manuscript: 1930's, 1941, 1946-1955, 1970

Ontologische Beweis

Feb. 10, 1970

P(φ) φ is positive (i.e. $\varphi \in P$.)

At. 1 $P(\varphi) \cdot P(\psi) \supset P(\varphi \cdot \psi)$ At. 2 $P(\varphi) \supset P(\sim \varphi)$

P1 $G(x) \equiv (\varphi) [P(\varphi) \supset \varphi(x)]$ (God)

P2 $\varphi \text{ Em } x \equiv (\psi) [\psi(x) \supset N(\exists y [\varphi(y) \supset \psi(y)])]$ (Every x)

P3 $p \supset q = N(p \supset q)$ Necessity

At. 2 $\left. \begin{array}{l} P(\varphi) \supset NP(\varphi) \\ \sim P(\varphi) \supset N\sim P(\varphi) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{because it follows} \\ \text{from the nature of the} \\ \text{property} \end{array}$

Th. $G(x) \supset G \text{ Em } x$

Df. $E(x) \equiv (\varphi) [\varphi \text{ Em } x \supset N(\exists x \varphi(x))]$ necessary Existence

Ax 3 $P(E)$

Th. $G(x) \supset N(\exists y G(y))$

hence $(\exists x) G(x) \supset N(\exists y G(y))$

" $M(\exists x) G(x) \supset MN(\exists y G(y))$

" $\supset N(\exists y G(y))$

$M = possibility$

any two instances of x are nec. equivalent

exclusive or $\cdot$ and for any number of humanoids

$M(\exists x) G(x)$ means ^{the system of} all pos. prop. is com-
patible This is true because of:

At. 4: $P(\varphi) \cdot \varphi \supset_N \psi \supset P(\psi)$ which implies

~~then~~ $\left\{ \begin{array}{l} x=x \text{ is positive} \\ x \neq x \text{ is negative} \end{array} \right.$

But if a system S of pos. prop. were inconsistent it would mean that the same prop. x (which is positive) would be $x \neq x$

Positive means: positive in the moral aesthetic sense (independently of the accidental structure of the world). Only then the ax. true. It must also mean: "attribution" as opposed to "privation" (or containing privation). - This is important for the proof

if φ is positive: $(x) N \sim \varphi(x)$ - otherwise $\varphi(x) \supset_N x \neq x$

hence $x \neq x$ positive, not $x=x$ neg. necessary At.

on the existence of properties

x i.e. the normal form in terms of elem. prop. contains a member without negation.

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu:
 $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften:
 $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists xG(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert:
 $\phi \text{ ess. } x \equiv \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G \text{ ess. } x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind:
 $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi \text{ ess. } x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists xG(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu:
 $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften:
 $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists xG(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert:
 $\phi \text{ ess. } x \equiv \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G \text{ ess. } x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind:
 $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi \text{ ess. } x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists xG(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall \phi [P(\neg \phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall \phi \forall \psi [(P(\phi) \wedge \Box \forall x [\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu: $\forall \phi [P(\phi) \supset \Diamond \exists x \phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften: $G(x) \equiv \forall \phi [P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond \exists x G(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall \phi [P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert: $\phi \text{ ess. } x \equiv \phi(x) \wedge \forall \psi (\psi(x) \supset \Box \forall y (\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x [G(x) \supset G \text{ ess. } x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind: $NE(x) \equiv \forall \phi [\phi \text{ ess. } x \supset \Box \exists y \phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box \exists x G(x)$

Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis

Axiom A1 Entweder eine Eigenschaft oder ihre Negation ist positiv: $\forall\phi[P(\neg\phi) \equiv \neg P(\phi)]$

Axiom A2 Eine Eigenschaft, die notwendigerweise durch eine positive Eigenschaft impliziert wird, ist positiv: $\forall\phi\forall\psi[(P(\phi) \wedge \Box\forall x[\phi(x) \supset \psi(x)]) \supset P(\psi)]$

Theorem T1 Positive Eigenschaften kommen möglicherweise einer existenten Entität zu:
 $\forall\phi[P(\phi) \supset \Diamond\exists x\phi(x)]$

Definition D1 Eine gottähnliche Entität besitzt alle positiven Eigenschaften:
 $G(x) \equiv \forall\phi[P(\phi) \supset \phi(x)]$

Axiom A3 Die Eigenschaft, gottähnlich zu sein, ist positiv: $P(G)$

Korollar C Möglicherweise existiert Gott $\Diamond\exists xG(x)$

Axiom A4 Positive Eigenschaften sind notwendigerweise positiv: $\forall\phi[P(\phi) \supset \Box P(\phi)]$

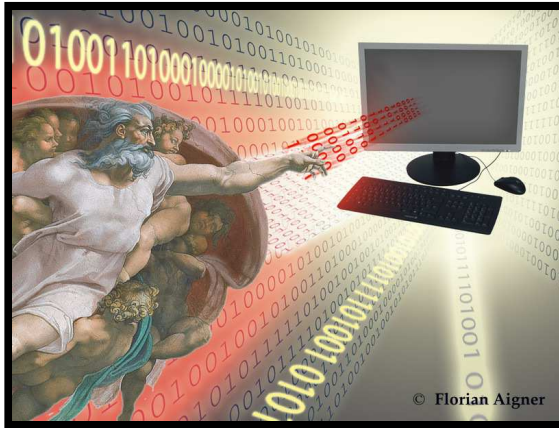
Definition D2 Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität zukommt und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert:
 $\phi \text{ ess. } x \equiv \phi(x) \wedge \forall\psi(\psi(x) \supset \Box\forall y(\phi(y) \supset \psi(y)))$

Theorem T2 Gottähnlichkeit ist Essenz jeder gottähnlichen Entität: $\forall x[G(x) \supset G \text{ ess. } x]$

Definition D3 Eine Entität existiert notwendigerweise, wenn all ihre Essenzen notwendigerweise in einer existenten Entität realisiert sind:
 $NE(x) \equiv \forall\phi[\phi \text{ ess. } x \supset \Box\exists y\phi(y)]$

Axiom A5 Notwendigerweise zu existieren ist eine positive Eigenschaft: $P(NE)$

Theorem T3 Gott existiert notwendigerweise: $\Box\exists xG(x)$



Gödel's Gottesbeweis auf dem Computer

- Pionierarbeit zur Mechanisierung/Automatisierung
- eines modernen ontologischen Gottesbeweises
 - von höherstufiger Modallogik

Herausforderung: Keine Beweiser für höherstufige Modallogik (QML)

Unsere Lösung: Einbettung in klassischer Logik höherer Stufe (HOL)

Was genau haben wir gemacht:

A: Papier und Bleistift: detaillierte Beweisskizze

B: Formalisierung: in klassischer Logik höherer Stufe (HOL)

Automatisierung: Theorembeweiser LEO-II und SATALLAX

Konsistenz: Modellgenerierer NITROX

C: Schrittweise Verifikation: interaktiver Beweisassistent Coq

D: Verifikation & Automatisierung: Beweisassistent ISABELLE

Konnten wir neue Einsichten gewinnen?

Ja — Diskussion folgt!

Formalisierung in HOL

QML $\varphi, \psi ::= \dots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall P\varphi$

HOL $s, t ::= C \mid x \mid \lambda x s \mid s t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x t$

Formalisierung in HOL

$$\text{QML} \quad \varphi, \psi ::= \dots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall P\varphi$$
$$\text{HOL} \quad s, t \quad ::= \quad C \mid x \mid \lambda x s \mid s t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x t$$

QML in HOL: Formeln φ werden abgebildet auf HOL Prädikate

$\neg$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \neg \varphi s$
$\wedge$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda\psi_{l \rightarrow o} \lambda s_l (\varphi s \wedge \psi s)$
$\supset$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda\psi_{l \rightarrow o} \lambda s_l (\neg \varphi s \vee \psi s)$
$\square$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \forall u_l (\neg rsu \vee \varphi u)$
$\diamond$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \exists u_l (rsu \wedge \varphi u)$
$\forall$	$=$	$\lambda h_{\mu \rightarrow (\iota \rightarrow o)} \lambda s_l \forall d_\mu hds$
$\exists$	$=$	$\lambda h_{\mu \rightarrow (\iota \rightarrow o)} \lambda s_l \exists d_\mu hds$
$\forall$	$=$	$\lambda H_{(\mu \rightarrow (\iota \rightarrow o)) \rightarrow (\iota \rightarrow o)} \lambda s_l \forall d_\mu Hds$
valid	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \forall w_l \varphi w$

 Ax

Formalisierung in HOL

$$\text{QML} \quad \varphi, \psi ::= \dots \mid \neg\varphi \mid \varphi \wedge \psi \mid \varphi \supset \psi \mid \Box\varphi \mid \Diamond\varphi \mid \forall x\varphi \mid \exists x\varphi \mid \forall P\varphi$$
$$\text{HOL} \quad s, t ::= C \mid x \mid \lambda x s \mid s t \mid \neg s \mid s \vee t \mid \forall x t$$

QML in **HOL**: Formeln φ werden abgebildet auf **HOL** Prädikate

$\neg$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \neg\varphi s$	
$\wedge$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda\psi_{l \rightarrow o} \lambda s_l (\varphi s \wedge \psi s)$	
$\supset$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda\psi_{l \rightarrow o} \lambda s_l (\neg\varphi s \vee \psi s)$	
$\square$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \forall u_l (\neg rsu \vee \varphi u)$	
$\diamond$	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \lambda s_l \exists u_l (rsu \wedge \varphi u)$	
$\forall$	$=$	$\lambda h_{\mu \rightarrow (l \rightarrow o)} \lambda s_l \forall d_\mu hds$	
$\exists$	$=$	$\lambda h_{\mu \rightarrow (l \rightarrow o)} \lambda s_l \exists d_\mu hds$	
$\forall$	$=$	$\lambda H_{(\mu \rightarrow (l \rightarrow o)) \rightarrow (l \rightarrow o)} \lambda s_l \forall d_\mu Hds$	
valid	$=$	$\lambda\varphi_{l \rightarrow o} \forall w_l \varphi w$	

Gleichungen in **Ax** werden als Axiome an **HOL** Beweiser gereicht!

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

$$\Diamond \exists x G(x)$$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

$\Diamond \exists x G(x)$

valid $(\Diamond \exists x G(x))_{I \rightarrow o}$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

Anwendung Gleichung aus Ax

$$\begin{aligned} & \diamond \exists x G(x) \\ \text{valid } & (\diamond \exists x G(x))_{t \rightarrow o} \\ \forall w_t & (\diamond \exists x G(x))_{t \rightarrow o} w \end{aligned}$$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

$\Diamond \exists x G(x)$

valid $(\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o}$

$\forall w_l (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o} w$

$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge (\exists x G(x))_{l \rightarrow o} u)$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

$\Diamond \exists x G(x)$

valid $(\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o}$

$\forall w_l (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o} w$

$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge (\exists x G(x))_{l \rightarrow o} u)$

$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge \exists x Gxu)$

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

$$\Diamond \exists x G(x)$$

$$\text{valid } (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o}$$

$$\forall w_l (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o} w$$

$$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge (\exists x G(x))_{l \rightarrow o} u)$$

$$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge \exists x Gxu)$$

Was tun wir hier?

Um zu zeigen, dass φ ein Theorem ist in QML,
→ zeigen wir anstelle dessen, dass $\text{valid } \varphi_{l \rightarrow o}$ abgeleitet werden kann
aus Ax in HOL.

Möglich mit interaktiven oder automatischen HOL Beweisern.

Formalisierung in HOL

Beispiel:

QML formula

QML formula in HOL

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

Anwendung Gleichung aus Ax

$\Diamond \exists x G(x)$

$\text{valid } (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o}$

$\forall w_l (\Diamond \exists x G(x))_{l \rightarrow o} w$

$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge (\exists x G(x))_{l \rightarrow o} u)$

$\forall w_l \exists u_l (rwu \wedge \exists x Gxu)$

Was tun wir hier?

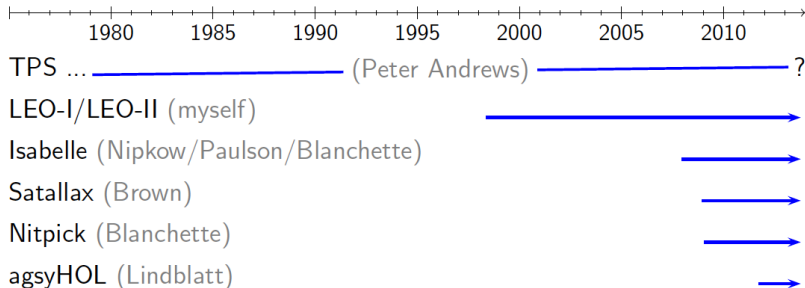
Um zu zeigen, dass φ ein Theorem ist in QML,
→ zeigen wir anstelle dessen, dass $\text{valid } \varphi_{l \rightarrow o}$ abgeleitet werden kann
aus Ax in HOL.

Möglich mit interaktiven oder automatischen HOL Beweisern.

Korrektheit und Vollständigkeit:

(bzgl. Henkin Semantik)

Automatische Theorembeweiser für HOL



- all accept TPTP THF Syntax [SutcliffeBenzmüller, J.Form.Reas, 2009]
 - can be called remotely via SystemOnTPTP at Miami
 - they significantly gained in strength over the last years
 - they can be bundled into a combined prover **HOL-P**

Exploit HOL with Henkin semantics as metalogic
Automate other logics (& combinations) via semantic embeddings
— **HOL-P** becomes a **Universal Reasoner** —



Experimente und Resultate

Experimente

- ▶ Formale Kodierung (in HOL):
 - ▶ Axiome der Modallogik und der Einbettung von QML in HOL
 - ▶ Axiome, Definitionen und Theoreme in Gödel's Gottesbeweis
- ▶ Experimente mit automatischen Theorembeweisern:
 - ▶ LEO-II, Satallax, Nitrox
- ▶ Interaktive Beweise mit Beweisassistenten:
 - ▶ Isabelle and Coq

Alle Quellen sind online (jeder kann mitmachen!):

<https://github.com/FormalTheology/GoedelGod/>

Weitere Demo gerne nach dem Vortrag!

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- ▶ Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- ▶ Beweis ist korrekt in Modallogik S5
 - ▶ mit konstanten Individuendomänen
 - ▶ mit variablen Individuendomänen
- ▶ schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ▶ ...

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- ▶ Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- ▶ Beweis ist korrekt in Modallogik S5
 - ▶ mit konstanten Individuendomänen
 - ▶ mit variablen Individuendomänen
- ▶ schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ▶ ...
- ▶ $\exists x.G(x)$ kann direkt bewiesen werden, ohne Umweg über $\Box \exists x.G(x)$
- ▶ Gleichheit nicht notwendig zum Beweis von Theorem T1
- ▶ Einmalige Anwendung von A2 genügt zum Beweis von T1
- ▶ ...

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Gute Nachrichten

- ▶ Axiome and Definitionen sind konsistent (widerspruchsfrei)
- ▶ Beweis ist korrekt in Modallogik S5
 - ▶ mit konstanten Individuendomänen
 - ▶ mit variablen Individuendomänen
- ▶ schwächere Modallogik KB ist bereits ausreichend
- ▶ ...
- ▶ $\exists x.G(x)$ kann direkt bewiesen werden, ohne Umweg über $\Box \exists x.G(x)$
- ▶ Gleichheit nicht notwendig zum Beweis von Theorem T1
- ▶ Einmalige Anwendung von A2 genügt zum Beweis von T1
- ▶ ...
- ▶ Gott hat nur positive Eigenschaften:
$$\forall x.G(x) \supset (\forall \varphi. \neg P(\varphi) \supset \neg \varphi(x)).$$
- ▶ Monotheismus:
$$\forall x. \forall y. G(x) \wedge G(y) \supset x = y.$$

Resultate (Scott's Version von Gödel's Gottesbeweis)

Schlechte Nachricht

- ▶ Gödel's Axiome und Definitionen implizieren den modalen Kollaps: $\forall \phi. (\phi \supset \Box \phi)$

Fundamentale Kritik gegen Gödel's Gottesbeweis.

Alles was der Fall ist, ist notwendigerweise der Fall.

Es gibt keine kontingenten "Wahrheiten".

Alles ist determiniert.

Es gibt keinen freien Willen.

Auswege wurden vorgeschlagen von: Anderson, Fitting, Hájek,

...

Resultate (Gödel's Originalversion des Gottesbeweises)

Sehr schlechte Nachricht

- Die Axiome und Definitionen in Gödel's Originalscriptum (ohne Konjunkt $\phi(x)$ in der Definition von Essenz), sind inkonsistent.

$$\phi \text{ ess. } x \equiv \phi(x) \wedge \forall \psi (\psi(x) \supset \Box \forall y (\phi(y) \supset \psi(y)))$$

(Eine Eigenschaft ist Essenz einer Entität, falls sie der Entität **zukommt** und notwendigerweise alle Eigenschaften der Entität impliziert.)

Zusammenfassung

Unsere Beiträge:

- ▶ Infrastruktur für das Beweisen in höherstufigen Modallogiken
- ▶ Verifikation von Gödel's Gottesbeweis mit HOL Beweisern
 - Experimente mit variierenden Logikparametern
- ▶ Neue Resultate und Einsichten (durch HOL Beweiser)
- ▶ Richtung: **Computer-assistierte Theoretische Philosophie**
 - vgl. Ed Zalta's Computational Metaphysics Projekt (Stanford)
 - vgl. John Rushby's kürzliche Verification von Anselm's Beweis
 - Leibniz' dictum — Calcuemus!
- ▶ Verbindung zwischen Informatik/KI, Philosophie and Theologie

Zusammenfassung

Unsere Beiträge:

- Infrastruktur für das Beweisen in höherstufigen Modallogiken
- Verifikation von Gödel's Gottesbeweis mit HOL Beweisern
 - Experimente mit variierenden Logikparametern
- Neue Resultate und Einsichten (durch HOL Beweiser)
- Richtung: **Computer-assistierte Theoretische Philosophie**
 - vgl. Ed Zalta's Computational Metaphysics Projekt (Stanford)
 - vgl. John Rushby's kürzliche Verification von Anselm's Beweis
 - Leibniz' dictum — Calcalemus!
- Verbindung zwischen Informatik/KI, Philosophie and Theologie

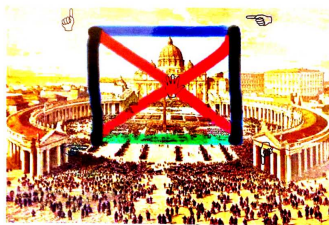
Laufende und weitere Arbeiten

- Formalisierung der (relevanten) Literatur
 - ...insbesondere Kritik und Verbesserungsvorschläge
- Eigene neue Beiträge — unterstützt durch Theorembeweiser?

Ja, es gibt Kontakt zu Philosophen und Theologen ...

HANDBOOK OF THE WORLD CONGRESS ON THE SQUARE OF OPPOSITION IV

Edited by
Jean-Yves Béziau
Katarzyna Gan-Krzywoszyńska



Pontifical Lateran University, Vatican
May 5-9, 2014

So kann man es natürlich auch sehen ...

I'm sure that God would be impressed with your proof, if only he existed :-)

Larry

Die Philosophen können so schön staunen.

Sie packen Dinge in Begriffe (gucken dabei in die Luft) werfen die Begriffe dann in ihre Philosophiekiste, schütteln ganz dolle, und freuen sich, dass ganz genau rauskommt, was sie vorher reingetan haben. Und das geht sogar, wenn eine Maschine die Kiste schüttelt.

Unerstaunt
2017cp

60. Suchlauf

 **souveränsatt** 09.09.2013

man kann auch auf andere Weise in diesem Zusammenhang methodisch vorgehen:
bei einer längeren Autofahrt das Radio auf automatischen Suchlauf stellen. Nach zwei Tagen sieht man Gott

... mehr davon im Internet ...